Hinweis

Um der Vielfalt der Schulsysteme in den Bundesländern Rechnung zu tragen, aber auch die Mathematik-Olympiade bundesweit durchführen zu können, wurde der Begriff *Olympiadeklasse* geprägt. Die Aufgaben und Lösungen werden für die Olympiadeklassen 3 bis 12 angeboten.

Für die Bundesrunden gelten die folgenden Regeln zur Einstufung der Teilnehmer in die Olympiadeklassen 8 bis 12. Es wird empfohlen, diese Regeln in gleicher Weise für alle Olympiadeklassen der ersten 3 Runden anzuwenden.

- Für die Primarstufe und die Sekundarstufe 1 entspricht die Olympiadeklasse grundsätzlich dem laufenden Schuljahr.

- Für die Sekundarstufe 2 gibt es bundesweit unterschiedliche Bezeichnungen oder Nummerierungen der schulischen Jahrgangsstufen. In der Abiturstufe sind daher
  - die Olympiadeklasse 10 für die einjährige Einführungsphase und
  - die Olympiadeklassen 11 und 12 für die beiden Jahre der Qualifikationsphase

  vorgesehen.

- Die beiden Standard-Abläufe der Olympiadeklassen für die Primarstufe bis zum Abitur sind:
  - **G8**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10/E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

  - **G9**

laufendes Schuljahr	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Jahrgangsstufe	3	4	5	6	7	8	9	10	E	Q	Q
Olympiadeklasse	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**10**	**11**	**12**

- **Wichtig: Doppelstart in Olympiadeklasse 10**
  Für eine optimal abgestimmte Vergleichbarkeit zwischen den beiden Abläufen starten Schülerinnen und Schüler aus G9 sowohl in ihrem Abschlussjahr der Sekundarstufe 1 als auch im Einführungsjahr der Sekundarstufe 2 in der Olympiadeklasse 10.

- **Wichtig: Klasse 13 startet in Olympiadeklasse 12**
  Daher starten Schülerinnen und Schüler aus G9 in ihrem Abiturjahr in der Olympiadeklasse 12.

Olympiadeklasse
5

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

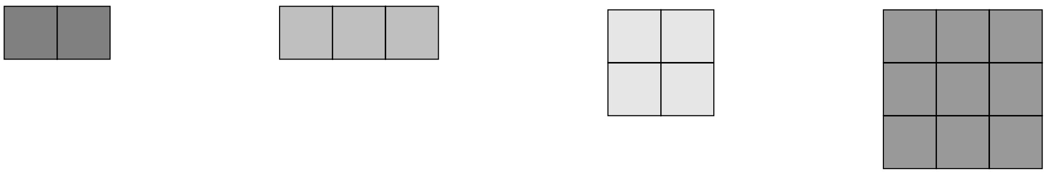
© 2019 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

590511

Gitter-Rechtecke sollen ausgelegt werden. Zur Verfügung stehen Spielsteine mit zunächst folgenden vier Figurentypen:

Rechteck 2×1 Rechteck 3×1 Quadrat 2×2 Quadrat 3×3

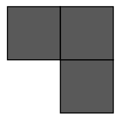


a) Zeige, dass es möglich ist, ein 5×4-Rechteck so auszulegen, dass alle vier Figurentypen verwendet werden.

b) Zeige, dass es nicht gelingen kann, mit allen vier Figurentypen ein 4×4-Quadrat auszulegen.

c) Zeige, dass es möglich ist, ein 5×5-Quadrat so auszulegen, dass alle vier Figurentypen und nicht mehr als sechs Spielsteine verwendet werden.

d) Jetzt wird ein fünfter Figurentyp eingeführt – der Winkel:



Ist es weiterhin möglich, ein 5×5-Quadrat mit sechs Spielsteinen auszulegen und dabei alle fünf Figurentypen zu verwenden?

590512

a) Ermittle alle Zahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
   (1) Die Zahl ist fünfstellig.
   (2) Die Zahl besteht nur aus den Ziffern 4 und 6.
   (3) Die Zahl auf Tausender gerundet ergibt 45 000.

b) Ermittle alle Zahlen, die die folgenden Bedingungen erfüllen:
   (1) Die Zahl ist vierstellig.
   (2) Die zweistellige Zahl aus Tausender- und Hunderterziffer ist ein Vielfaches von 9.
   (3) Die zweistellige Zahl aus Zehner- und Einerziffer ist ein Vielfaches von 11.
   (4) Die Zahl auf Hunderter gerundet ist kleiner als 2000.
   (5) Die Zahl auf Zehner gerundet ist größer als 1870.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

Hinweis: Bei den Bedingungen (2) und (3) im Aufgabenteil b) wird die zweistellige Zahl jeweils unter Beibehaltung der Reihenfolge der Ziffern gebildet.

<u>590513</u>

Die Mädchen der Schul-Tanzgruppe möchten für einen Auftritt einfarbige T-Shirts und einfarbige Röcke anziehen. Die T-Shirt-Farbe soll aber nicht mit der Rockfarbe übereinstimmen.

Zur Auswahl für die T-Shirts und für die Röcke stehen die Farben Rot, Grün, Orange und Blau.

a) Wie viele Kinder können damit eingekleidet werden, so dass alle verschieden aussehen?

In der Tanzgruppe sind 28 Kinder. Es müssen also noch weitere T-Shirts und Röcke gekauft werden, so dass alle Kinder verschieden eingekleidet werden können.

b) Wie viele Farben für die T-Shirts und Röcke müssen dafür noch mindestens dazu gewählt werden? Gib die kleinste Anzahl für die Farben an.

<u>590514</u>

Steffen hat sein Schachbrett mit den Zahlen von 1 bis 64 belegt (siehe Abbildung A 590514 a).

a) Er setzt einen Springer auf das Feld mit der Zahl 2 und möchte mit mehreren Zügen ein Feld in der untersten Zeile erreichen. Dabei addiert Steffen die Zahlen der Felder, auf denen sich der Springer auf seinem Weg aufhält.
Finde den Weg, bei dem diese Summe am kleinsten ist, und gib die Summe an.
Erläutere dein Vorgehen.

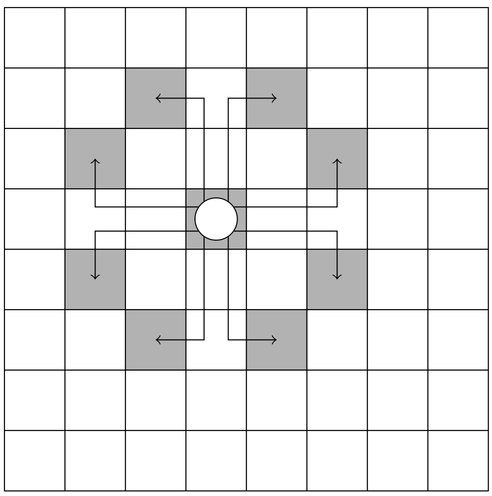
b) Welches ist die kleinste entsprechende Summe, wenn der Springer sich durch mehrere Züge vom Feld 28 zum Feld 29 bewegen soll?

c) Untersuche, ob sich der Springer vom Feld 1 zum Feld 64 bewegen kann.

Hinweis: Ein Springer zieht zwei Felder vorwärts und ein Feld zur Seite (siehe Abbildung A 590514 b).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

A 590514 a



A 590514 b

Olympiadeklasse **6**

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2019 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

590611

Am Ende der Sommerferien betrachten Amelie, Beatrix und Conny gegenseitig ihre Urlaubsfotos, die sie während ihrer Ferien in den Alpen, an der Ostsee und an der Nordsee gemacht haben. Jedes Mädchen war in den Ferien in genau einer dieser Regionen. Die Kinder stellen fest:

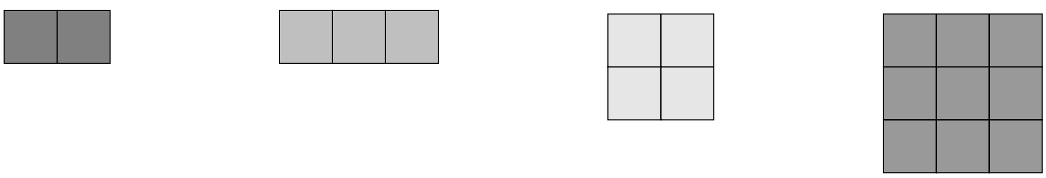
(1) Alle Mädchen haben unterschiedlich viele Fotos gemacht.
(2) Beatrix hat weniger Fotos gemacht als das Mädchen, das an der Ostsee im Urlaub war.
(3) Es gibt mehr Fotos von der Nordsee als von den Alpen.
(4) Die wenigsten Fotos hat Amelie gemacht.

Ermittle die Reihenfolge der Ferienregionen, geordnet nach der Anzahl der Fotos der Region, und ermittle auch, welches Mädchen wo seine Ferien verbracht hat.

590612

Gitter-Quadrate sollen ausgelegt werden. Zunächst stehen Spielsteine folgender vier Figurentypen zur Verfügung:

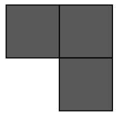
Rechteck 2×1 Rechteck 3×1 Quadrat 2×2 Quadrat 3×3



a) Zeichne ein 5×5-Quadrat und lege es so mit Spielsteinen aus, dass alle vier Figurentypen vorkommen, du aber nicht mehr als sechs Spielsteine verwendest.
Zeige entsprechend, dass ein 6×6-Quadrat so ausgelegt werden kann, dass alle vier Figurentypen und nicht mehr als sechs Spielsteine verwendet werden.
Zeige entsprechend, dass ein 7×7-Quadrat so ausgelegt werden kann, dass alle vier Figurentypen und nicht mehr als zehn Spielsteine verwendet werden.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

b) Jetzt wird ein fünfter Figurentyp eingeführt - der Winkel:



Ist es möglich, ein 5×5-Quadrat mit sechs Spielsteinen, ein 6×6-Quadrat mit acht und ein 7×7-Quadrat mit zehn Spielsteinen auszulegen, wenn in allen Fällen alle fünf Figurentypen verwendet werden sollen?

c) Und das Schwierigste am Schluss: Kann man aus neun Winkeln einen vergrößerten Winkel legen?

590613

Die Oma hat die T-Shirts der Enkelkinder gewaschen; eins ist rot, eins ist blau und zwei sind grün.

Sie hängt die T-Shirts nebeneinander zum Trocknen auf die Leine.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung hat die Oma dafür, wenn man nur die Farben betrachtet?

b) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung hätte die Oma, wenn alle vier T-Shirts verschiedene Farben hätten?

Nun findet die Oma in der Waschmaschine noch ein fünftes T-Shirt.

c) Wie viele Möglichkeiten der Anordnung hätte die Oma, wenn alle fünf T-Shirts verschiedene Farben hätten?

d) Das fünfte T-Shirt war aber grün, auf der Leine hängen also ein rotes, ein blaues und drei grüne T-Shirts.
Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Anordnung gibt es jetzt für das Aufhängen auf der Leine?

590614

In einer Tabelle mit sieben Spalten werden die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, … fortlaufend notiert (siehe Abbildung). Die Tabelle kann nach unten beliebig erweitert werden.

a) An welchen Stellen in der Tabelle (Zeile und Spalte) befinden sich alle Zahlen, die sowohl durch 3 als auch durch 7 teilbar sind? Wie viele dieser Zahlen gibt es bis zur hundertsten Zeile?

b) An welchen Stellen in der Tabelle befinden sich alle Zahlen, die sowohl durch 3, durch 6 als auch durch 7 teilbar sind?

c) An welchen Stellen in der Tabelle befinden sich alle Zahlen, die sowohl bei Division durch 7 als auch bei Division durch 8 den Rest 1 lassen?

d) An welchen Stellen in der Tabelle befinden sich alle Zahlen, die bei Division durch 7 den Rest 6 und bei Division durch 8 den Rest 7 lassen?

e) An welcher Stelle in der Tabelle steht die Zahl 2019?

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35
36	37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63
64	65	66	67	68	69	70
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Olympiadeklasse **7**

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2019 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

590711

Ritter Kunibert hat seinem König Kasimir in einer Schlacht das Leben gerettet. Zur Belohnung führt Kasimir seinen Retter in einen Saal, in dem sich drei gleichgroße Truhen befinden. Auf der ersten Truhe steht „Gold“, auf der zweiten steht „Silber“ und auf der dritten steht „Gold und Silber“.

Kasimir spricht: „Sieh hier diese drei Truhen. Eine ist nur mit Goldmünzen gefüllt, eine nur mit Silbermünzen und eine mit Gold- und Silbermünzen zu gleichen Teilen. Die Aufschriften aber sind sämtlich falsch. Sage mir, aus welcher Truhe ich dir eine Münze zeigen soll, und entscheide dich dann, welche Truhe du haben willst.“

Aus welcher Truhe sollte sich Ritter Kunibert eine Münze zeigen lassen, damit er in jedem Fall die nur mit Goldmünzen gefüllte Truhe erkennen und dann auswählen kann? Begründe deine Antwort.

590712

Gib für jede der Teilaufgaben a), b) und c) jeweils alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n an, welche die angegebene Forderung erfüllen, und weise nach, dass sie die angegebene Forderung erfüllen.

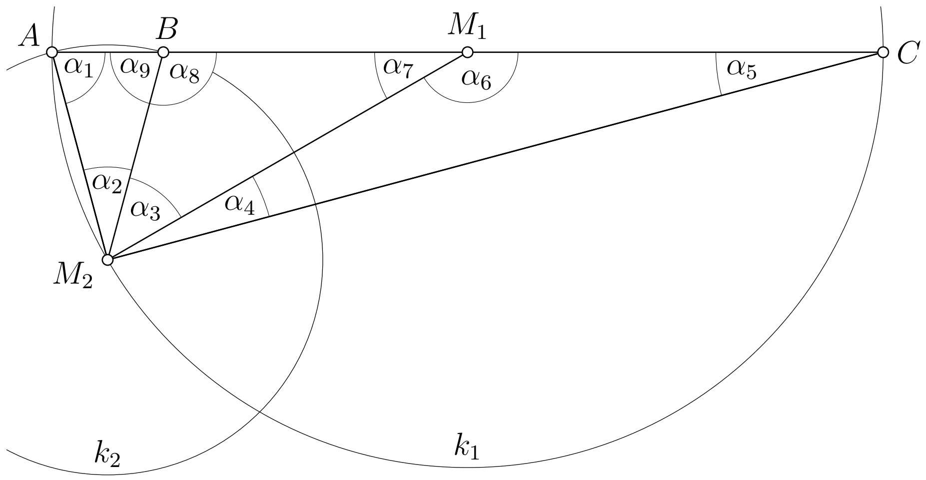
a) Die Zahl $\frac{13}{20} + \frac{n}{20}$ ist kleiner als 1.
b) Die Zahl $\frac{13}{20} - \frac{n}{20}$ ist gleich einer Zahl $\frac{1}{k}$ mit einer positiven ganzen Zahl k.
c) Die Zahl $\frac{13}{20} + \frac{n}{20}$ ist eine positive ganze Zahl.

Für besonders interessierte Schülerinnen und Schüler:

d) Ermittle alle positiven ganzen Zahlen n, für die $\frac{13}{20} + \frac{n}{20}$ größer als $\frac{4}{5}$ und kleiner als $\frac{5}{4}$ ist.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

590713



Wir betrachten einen Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Durchmesser $\overline{AC}$ sowie einen Kreis k_2, dessen Mittelpunkt M_2 auf dem Kreis k_1 liegt und der die Gerade AC im Punkt A und in einem Punkt B zwischen A und M_1 schneidet. Die Größen von neun Winkeln bezeichnen wir wie in der Abbildung angegeben mit α_1 bis α_9.

Ermittle die Winkelgrößen α_2 bis α_9 unter der Voraussetzung $\alpha_1 = 75°$ durch Anwendung geometrischer Sätze.

Hinweis: Für die Ermittlung einiger Winkelgrößen ist es hilfreich, Paare gleich langer Strecken zu erkennen.

590714

Anne hat aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert und als Summe 119 erhalten. Von diesen aufeinanderfolgenden Zahlen ist die Differenz aus der größten und der kleinsten eine Primzahl.

Ermittle, welche Zahlen Anne addiert hat, und zeige, dass diese durch die Angaben eindeutig bestimmt sind.

Olympiadeklasse **8**

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2019 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

590811

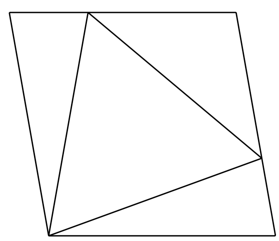
Leo hat an einem Kiosk einen Müsliriegel gekauft. Er hatte nur Euro-Münzen dabei, und zwar genau drei. Mit genau einer dieser Münzen bezahlte er. Das korrekt zurückgegebene Wechselgeld war genau so viel, wie ihm noch zum Bezahlen mit den beiden anderen Münzen gefehlt hatte.

a) Leo meint, dass das Wechselgeld 35 Cent betrug.
   Ermittle, welche Münzen Leo in diesem Fall bei sich hatte und wie viel der Müsliriegel gekostet hat. Begründe auch, warum sich dies aus den Angaben eindeutig ermitteln lässt.
b) Leo meint nun, dass das Wechselgeld doch 55 Cent betrug.
   Untersuche, ob dies möglich ist.
c) Leo ist sich nun überhaupt nicht mehr sicher.
   Untersuche, ob es auch einen Wechselgeldbetrag gibt, bei dem nicht eindeutig ermittelt werden kann, welche Münzen Leo bei sich hatte.

Hinweis: Die Euro-Münzen gibt es nur als 1-Cent-, 2-Cent-, 5-Cent-, 10-Cent-, 20-Cent-, 50-Cent-, 1-Euro- und 2-Euro-Münzen.

590812

Eine Raute und ein gleichseitiges Dreieck haben dieselbe Seitenlänge, ein Eckpunkt des Dreiecks fällt mit einem Eckpunkt der Raute zusammen und die beiden anderen Eckpunkte des Dreiecks liegen auf verschiedenen Seiten der Raute, siehe nebenstehende Abbildung.



Ermittle die Größen der Innenwinkel der Raute, ohne zu messen.

Hinweis: Ein anderer Name für eine Raute ist Rhombus.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

590813

Für den Aufstieg auf den Moberg sind Amina und Georg zwar gleichzeitig gestartet, aber Amina ist 20 Minuten vor Georg auf dem Gipfel angekommen. Dort überlegt Georg: „Wenn ich 20% weniger Zeit benötigt hätte und Amina 20% mehr Zeit, dann wären wir beide gleichzeitig oben angekommen.“

Berechne, wie lange Amina und Georg jeweils für den Aufstieg gebraucht haben.

590814

Das Logo der Mathematik-Olympiade enthält ein regelmäßiges Siebzehneck, einen Zirkel und ein Dreieck. Carl Friedrich Gauß bewies 1796, dass ein regelmäßiges Siebzehneck im Unterschied zu den meisten anderen regelmäßigen Vielecken allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.

a) Ermittle die Anzahl aller Diagonalen in einem regelmäßigen Siebzehneck.

b) Ermittle die Anzahl aller Dreiecke, die aus den Eckpunkten ein und desselben regelmäßigen Siebzehnecks gebildet werden können.

c) Ermittle die Anzahl aller Raumdiagonalen in einem Prisma mit einem regelmäßigen Siebzehneck als Grundfläche.

Olympiadeklassen **9 – 10**

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2019 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

591011

Es sei m eine von null verschiedene und ansonsten beliebige rationale Zahl.

In einem kartesischen Koordinatensystem (eine Koordinateneinheit soll gleich 1 cm sein) beschreibt dann die Gleichung $y = m\cdot(x-5)+2$ die Menge aller Punkte, die auf einer bestimmten Geraden g in der x-y-Ebene liegen. Die Gerade g schneidet die x-Achse in einem Punkt A und die y-Achse in einem Punkt B.

Gegeben ist weiterhin ein Punkt P mit den Koordinaten $P(5, 2)$.

a) Weisen Sie nach, dass alle auf diese Art beschriebenen Geraden (unabhängig vom konkret gewählten Wert für m) den Punkt P enthalten.

b) Es gelte $m = -0{,}8$. Die Punkte A und B bilden zusammen mit dem Koordinatenursprung O ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OAB.

c) Nun gelte $m = -0{,}3$. Eine Gerade durch O und P zerlegt das entstehende Dreieck OAB in die Teildreiecke OPB und OAP.
Berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte $\mathrm{A}_{OPB} : \mathrm{A}_{OAP}$ in Form eines Verhältnisses teilerfremder ganzer Zahlen.

d) Für welche Werte von m existiert das Verhältnis der Flächeninhalte $\mathrm{A}_{OPB} : \mathrm{A}_{OAP}$ und ist für diese Werte ebenfalls eine rationale Zahl?
(Hier werden also wieder alle vorgegebenen Werte für m betrachtet.)

Hinweis: Liegen drei durch gewisse Eigenschaften festgelegte Punkte auf einer Geraden oder fallen zwei von ihnen zusammen (sodass es eigentlich nur zwei Punkte gibt oder gar nur einen), dann sagt man mitunter, dass die drei Punkte ein „entartetes“ Dreieck bilden. Solche entarteten Dreiecke werden hier nicht betrachtet.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

591012

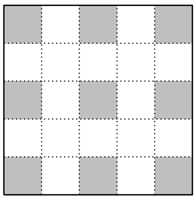
Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die n, $n+4$ und $n+8$ Primzahlen sind.

591013

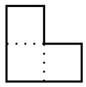
Zeigen Sie: Wenn sich die Winkelhalbierenden von drei Innenwinkeln eines konvexen Vierecks $ABCD$ in einem Punkt P schneiden, dann liegt P auch auf der vierten Innenwinkelhalbierenden.

591014

In Abbildung A 591014 a ist ein Quadrat aus 25 Feldern gegeben. Diese Figur soll mit (zueinander kongruenten) L-Steinen ausgelegt werden, wobei ein spezielles Feld vorher entfernt wird. Ein L-Stein besteht aus drei in L-Form angeordneten quadratischen Feldern (siehe Abbildung A 591014 b).



A 591014 a



A 591014 b

a) Aus dem Quadrat wird eines der grauen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur mit 8 L-Steinen legen lässt.

b) Aus dem Quadrat wird eines der weißen Felder entfernt. Zeigen Sie, dass sich die aus den verbleibenden 24 Feldern bestehende Figur nicht mit 8 L-Steinen legen lässt.

591015

Für ein Zufallsexperiment stehen vier rote und vier blaue Kugeln zur Verfügung. Zu Beginn befinden sich vier der acht Kugeln in einer Urne, die anderen vier dienen als Vorrat. In jedem Schritt des Zufallsexperiments wird nun eine Kugel aus der Urne zufällig gezogen und gegen eine Kugel der anderen Farbe aus dem Vorrat getauscht.

a) Zu Beginn befinden sich nur rote Kugeln in der Urne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die fünfte gezogene Kugel rot?

b) Zu Beginn sind jetzt zwei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind nach 10 Schritten wieder zwei rote und zwei blaue Kugeln in der Urne?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

<u>591016</u>

a) Entscheiden Sie (ohne Zuhilfenahme eines Taschenrechners), welche der folgenden Zahlen $t = 1\,125$, $u = 1\,225$, $v = 111\,225$ und $w = 112\,225$ Quadratzahlen sind.
Geben Sie gegebenenfalls die Zahlen an, deren Quadrate vorliegen.

b) Die ganze Zahl

$$a = \underbrace{11\ldots11}_{2\,018}\underbrace{22\ldots22}_{2\,019}5$$

besteht (im üblichen Zehnersystem) aus 4 038 Ziffern, und zwar 2 018 Einsen, 2 019 Zweien und einer Fünf.
Zeigen Sie, dass die Zahl a eine Quadratzahl ist, und geben Sie die Zifferndarstellung der Zahl b mit $b^2 = a$ an.

Olympiadeklassen **11 − 12**

59. Mathematik–Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

© 2019 *Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland*
`www.mathematik-olympiaden.de`. Alle Rechte vorbehalten.

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

<u>591211</u>

Gegeben ist die Funktion f, die für reelle Zahlen x mit $|x| \leq 3$ durch die Gleichung $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ definiert ist.

a) Eine zweite Funktion g wird durch $g(x) = 2 - \sqrt{9 - x^2}$ definiert.
Man untersuche, ob die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen, und berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

b) Es sei a eine reelle Zahl. Die Funktion g_a wird für $-3 \leq x \leq 3$ durch die Gleichung $g_a(x) = a - \sqrt{9 - x^2}$ definiert.
Man untersuche in Abhängigkeit von a, ob der Graph von f und der Graph von g_a gemeinsame Punkte besitzen, und berechne gegebenenfalls deren Koordinaten.

<u>591212</u>

Ein Quadrat $ABCD$ wird durch eine Gerade g in zwei Teile mit gleichem Flächeninhalt zerlegt.

Man beweise, dass dann der Diagonalenschnittpunkt M des Quadrats $ABCD$ auf der Geraden g liegt.

<u>591213</u>

Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen x und y gibt, die die Gleichung

$$20x^2 - 19y^2 = 2\,019$$

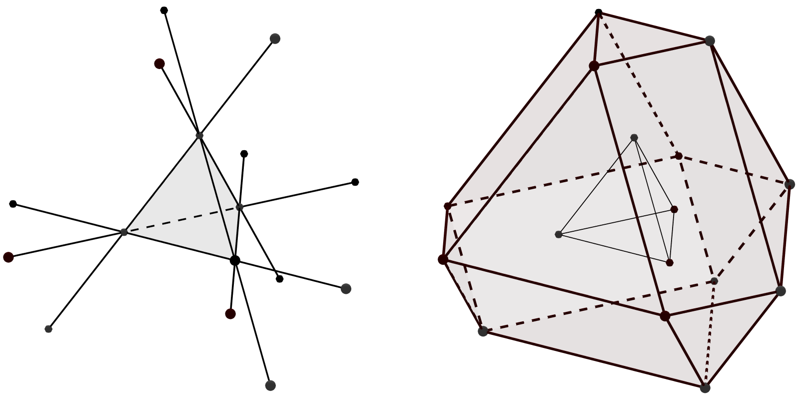
erfüllen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

591214

Gegeben sei ein reguläres Tetraeder T der Kantenlänge a. Man verlängert alle Kanten von T über alle Eckpunkte hinaus jeweils um a. Auf diese Weise entstehen zwölf neue Punkte.

Wie groß ist das Volumen des von diesen zwölf Punkten wie in Abbildung A 591214 a aufgespannten Körpers in Abhängigkeit vom Volumen V des Tetraeders T?

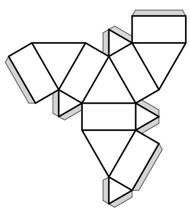


A 591214 a

Hinweis: Ein Netz dieses Körpers zum Ausschneiden und Basteln, das eine vergrößerte Version von Abbildung A 591214 b ist, lässt sich ab 1. September 2019 unter der URL

`https://www.mathematik-olympiaden.de/aufgaben/59/1/A591214-Beilage.pdf`

im World Wide Web finden.



A 591214 b